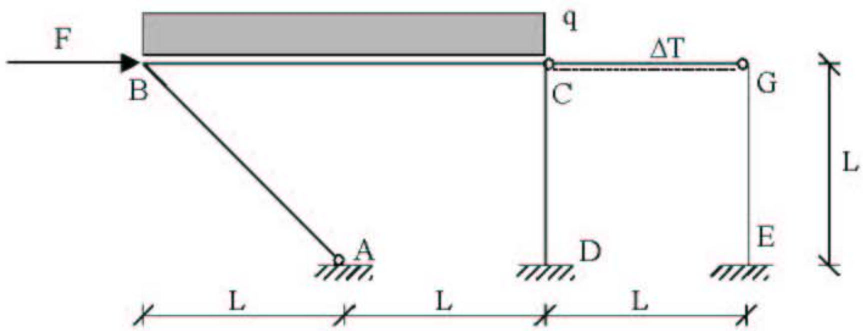
Analisi delle sollecitazioni su
Strutture intelaiate piane

Soluzione di alcuni esercizi tratti dalla
Prova Scritta TdC1 del 30/05/2005

Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria
Corso di Tecnica delle Costruzioni I – Nuovo Ordinamento
Anno accademico 2004-2005
Prova scritta - 30/05/2005

Esercizio n. 1 (Punti 10)
Si analizzi la struttura in figura rappresentandone i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (N, T, M).

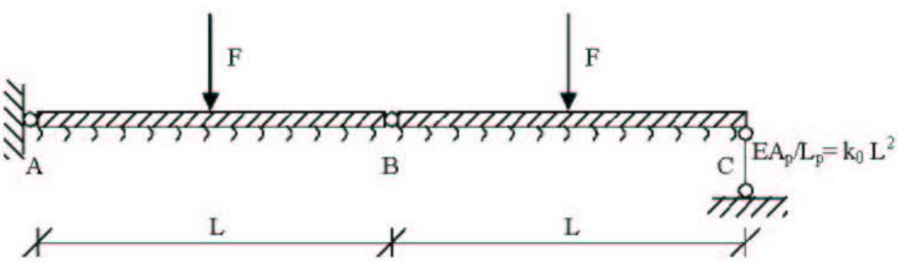


Si assumano i seguenti valori numerici:
- Sezioni degli elementi:

Sezioni Aste AB, CD e GE	Sezione traverso BC	Sezione del pendolo CG
$b_r = 30$ cm;	$b_t = 30$ cm	$b_p = 30$ cm
$h_r = 40 + C$ cm	$h_t = 50 + N$ cm	$h_p = 30$ cm

- Altri parametri:
L = 400 + 10 *C* – 20 *N* cm;
F = 10.0 + *C* - *N* kN;
q = 20.0 + 2.0 *C* + 1.5 *N* kN/m;
ΔT = *C* + *N* °C
$\alpha = 10^{-5}$ °C^{-1}
$R_{ck} = 25.0$ MPa
(N.B.: Con i simboli C e N si intende il numero di lettere che compongono cognome e nome, rispettivamente)

Esercizio n. 4 (Punti 8)
Si risolva la fondazione rappresentata nella figura seguente assumendo i valori numerici elencati:
L = 4.0 + *C* - *N* [m]
F = 100 + 10 *C* [kN]
$k_0 = 0.03$ N/mm^3
B = 50 + 5 *C* [cm]



Se ne traccino i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione evidenziando qualitativamente gli andamenti delle stesse nei diversi tratti.

Esercizio n. 1

• Valutazione dei parametri.

$h_r = 40 + 10 = 50$ cm; $h_t = 50 + 4 = 54$ cm

$l = 400 + 10 \cdot 10 - 20 \cdot 4 = 420$ cm

$F = 10 + 4 - 10 = 4$ KN

$q = 20 + 2 \cdot 10 + 1.5 \cdot 4 = 46$ KN/m

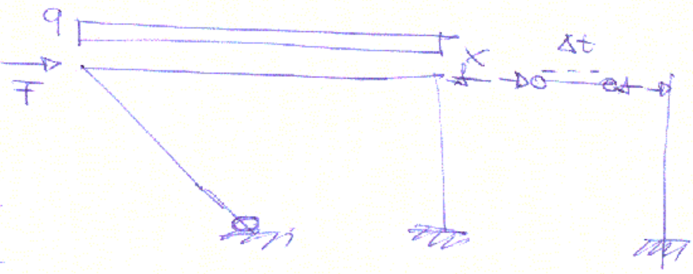
$\Delta T = 14°C$

$E_c = 9500\,(f_{ck}+8)^{1/3} = 9500\,(20+8)^{1/3} = 28847$ MPa

• Individuazione delle incognite

Il telaio si analizza secondo il Metodo degli spostamenti per il quale i parametri incogniti sono i seguenti

$$\underline{S} = \{ \varphi_B, \varphi_C, \delta_B \}$$



Quanto all'azione del pendolo, l'imposizione della condizione di congruenza tra gli spostamenti dei suoi estremi e la sua variazione di lunghezza si esprime come segue

$$\delta_D - \delta_G = \frac{X\,l_p}{E A_p} - \alpha \Delta t\, l_p$$

avendo considerato positive le contrazioni.

Risultando inoltre

$$\delta_G = \frac{XH^3}{3EI_{EG}}\ *$$

* nel seguito si ipotizza che $I_{EG} = I_r$ ovvero che la mensola abbia la stessa sezione dei ritti.

si ha

$$\delta_c = \frac{XH^3}{3EI_r} + \frac{X\ell_p}{EA_p} - \alpha\Delta t\ell_p$$

da cui

$$X = \frac{\delta_c + \alpha\Delta t\ell_p}{\frac{l^3}{3EI_r} + \frac{\ell}{EA_p}}.$$

In definitiva, anche l'azione del pendolo nella struttura può essere espressa in funzione di δ_c. In forza dell'ipotesi di inestensibilità delle aste, poi, si ha

$$\delta_c = \delta_B$$

e, dunque, il valore della X è ricondotto a quello di una delle tre incognite-spostamento.

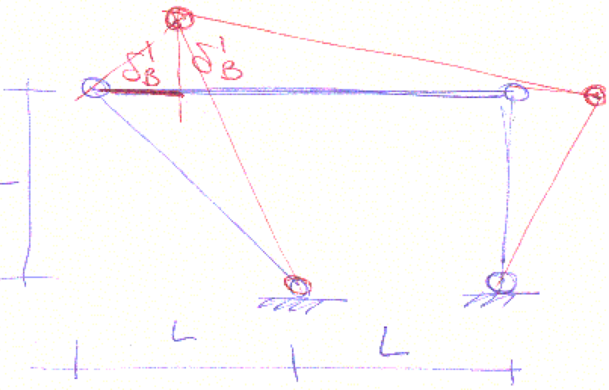
- Scrittura delle equazioni di equilibrio
  - eq. alla rotazione del nodo B

$$M_{BC} + M_{BA} = 0 \qquad (1)$$

  - eq. alla rotazione del nodo C

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \qquad (2)$$

– eq. globale (in termini di PLV): con riferimento alla struttura reticolare associata è possibile determinare il campo di spostamenti rigidi-infinitesimi { ("virtuali" perché compatibili con i vincoli della stessa struttura).



La relazione che intercorre tra lo spostamento δ_B' e quelli prodotti in direzione trasversale alle aste si esprime nella tabella riportata a lato.

ASTE \ NODO	δ_B'
δ_{AB}'	$\sqrt{2}$
δ_{BC}'	1
δ_{CD}'	1

Pertanto il P.L.V. al sistema di forze applicato sulla struttura reticolare associata si scrive come segue:

$$\left(M_{BA}+\cancel{M_{AB}}^{\,0}\right)\frac{\delta_{AB}'}{\sqrt{2}\ell}+\left(M_{BC}+M_{CB}\right)\frac{\delta_{BC}'}{2\ell}+\left(M_{CD}+M_{DC}\right)\cdot\frac{\delta_{CD}'}{\ell}+$$

$$+F\cdot\delta_B'-q\cdot 2\ell\cdot\frac{\delta_B'}{2}-X\cdot\delta_B'=0$$

da cui:

$$\left(\frac{M_{BA}}{\ell}+\frac{M_{BC}+M_{CB}}{2\ell}+\frac{M_{CD}+M_{DC}}{\ell}+F-q\ell-X\right)\cdot\delta_B'=0$$

e dunque deve essere

$$\frac{M_{BA}}{\ell}+\frac{M_{BC}+M_{CB}}{2\ell}+\frac{M_{CD}+M_{DC}}{\ell}+F-q\ell-\frac{\delta_B+\alpha\Delta t\ell p}{\frac{\ell^3}{3EI_r}+\frac{\ell}{EA_p}}=0 \quad (3)$$

poiché δ_B' ha un valore arbitrario.

- Espressione dei coefficienti di rigidezza e dei momenti d'incastro perfetto.

– ASTA AB ($I_r=b_r h_r^3/12=3.125\cdot10^9\ mm^4$)

$$W_{BA}=\frac{3EI_r}{\sqrt{2}\ell}=\frac{3\cdot28847\cdot3.125\cdot10^9}{\sqrt{2}\cdot4200}=4.5531\cdot10^{10}\ Nmm$$

$$U_{BA}=U_{AB}=\frac{W_{BA}}{\sqrt{2}\ell}=7.6655\cdot10^6\ N$$

– ASTA BC ($I_{BC}=I_t=b_t h_t^3/12=3.9366\cdot10^9\ mm^4$)

$$W_{BC}=\frac{4EI_t}{2\ell}=\frac{4\cdot28847\cdot3.9366\cdot10^9}{2\cdot4200}=5.4076\cdot10^{10}\ Nmm$$

$$W_{CB}=\frac{4EI_t}{2\ell}=5.4076\cdot10^{10}\ Nmm$$

$$V_{BC}=V_{CB}=\frac{2EI_t}{2\ell}=2.7038\cdot10^{10}\ Nmm$$

$$U_{CB}=U_{BC}=\frac{W_{BC}+V_{BC}}{2\ell}=\frac{W_{CB}+V_{CB}}{2\ell}=9.6564\cdot10^6\ N$$

$$\mu_{BC}=-\frac{q(2\ell)^2}{12}=-\frac{46\cdot(2\cdot4200)^2}{12}=-2.7048\cdot10^8\ Nmm$$

$$\mu_{CB}=-\mu_{BC}=2.7048\cdot10^8\ Nmm$$

– ASTA CD $(J_{CD} = J_r = 3{,}125 \cdot 10^9\ mm^4)$

$$W_{CD} = \frac{4EJ_r}{\ell} = \frac{4 \cdot 28847 \cdot 3{,}125 \cdot 10^9}{4200} = 8{,}5854 \cdot 10^{10}\ Nmm$$

$$W_{DC} = W_{CD} = 8{,}5854 \cdot 10^{10}\ Nmm$$

$$V_{CD} = V_{DC} = \frac{2EJ_r}{\ell} = 4{,}2927 \cdot 10^{10}\ Nmm$$

$$U_{CD} = \frac{W_{CD} + V_{CD}}{\ell} = 3{,}0662 \cdot 10^7\ N$$

$$U_{DC} = U_{CD} = 3{,}0662 \cdot 10^7\ N$$

Espressione dei momenti nodali in funzione degli spostamenti incogniti

Prima di esprimere i momenti M_{ij} in funzione di φ_i φ_j e δ_{ij} si ricorda la relazione che vale tra questi ultimi e lo spostamento nodale incognito δ_B (vedi tabella).

	δ_B
δ_{AB}	$\sqrt{2}$
δ_{BC}	1
δ_{CD}	1

– ASTA AB

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} = W_{BA} \cdot \varphi_B - U_{BA} \cdot \delta_{BA} = W_{BA}\,\varphi_B - \sqrt{2}\,U_{BA} \cdot \delta_B$$

– ASTA BC

$$M_{BC} = W_{BC}\varphi_B + V_{BC}\varphi_C - U_{BC}\delta_{BC} + \mu_{BC} =$$
$$= W_{BC}\varphi_B + V_{BC}\varphi_C - U_{BC}\delta_B + \mu_{BC}$$
$$M_{CB} = W_{CB}\cdot\varphi_C + V_{CB}\cdot\varphi_B - U_{CB}\cdot\delta_{BC} + \mu_{CB} =$$
$$= W_{CB}\cdot\varphi_C + V_{CB}\varphi_B - U_{CB}\delta_B + \mu_{CB}$$

– ASTA CD

$$M_{CD} = W_{CD}\cdot\varphi_C - U_{CD}\delta_{CD} = W_{CD}\varphi_C - U_{CD}\delta_B$$
$$M_{DC} = V_{DC}\varphi_C - U_{DC}\delta_{CD} = V_{DC}\varphi_C - U_{DC}\cdot\delta_B$$

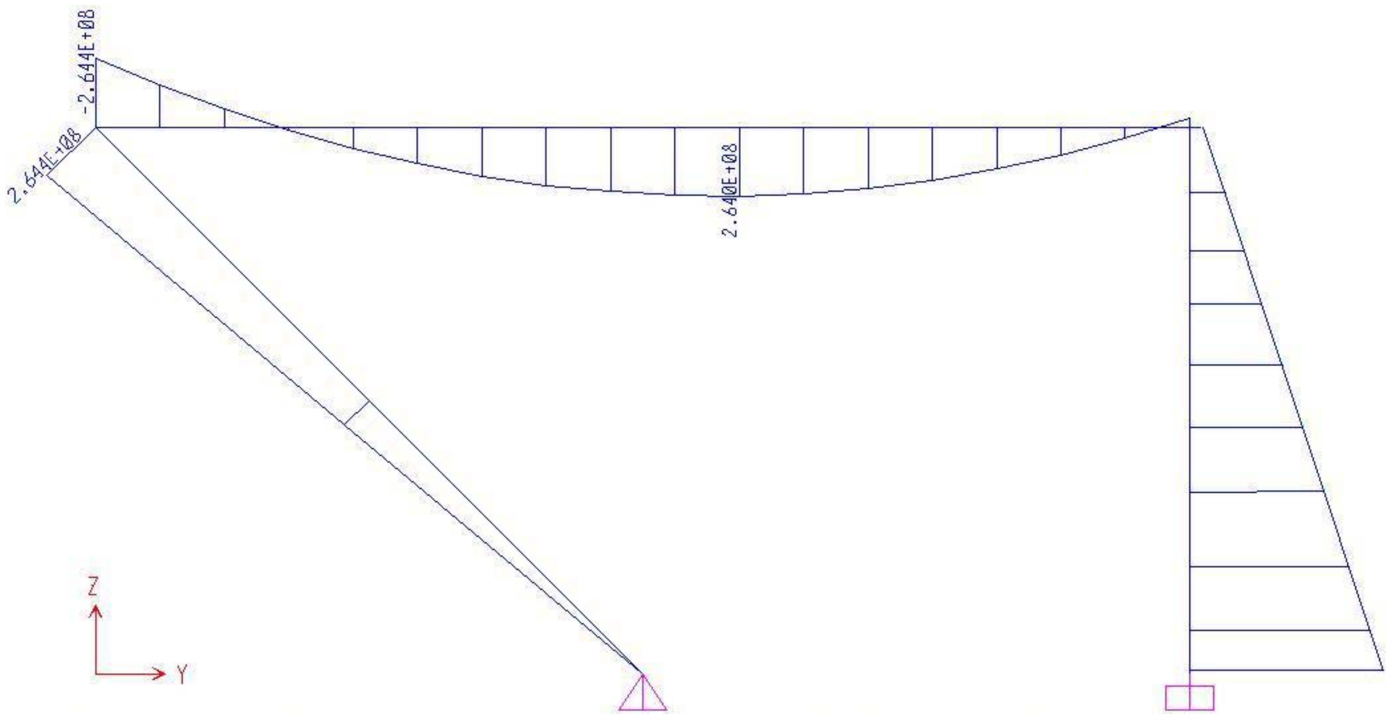
• Scrittura del sistema in forma matriciale

Le equazioni (1)-(2) e (3) costituiscono un sistema la cui forma matriciale è riportata nel seguito:

$$\begin{bmatrix} 9.96089\cdot10^{10} & 2.70384\cdot10^{10} & -2.04975\cdot10^{7} \\ 2.70384\cdot10^{10} & 1.39933\cdot10^{11} & -4.03194\cdot10^{7} \\ -2.04975\cdot10^{7} & -4.03194\cdot10^{7} & 23110.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2.7048\cdot10^{8} \\ +2.7048\cdot10^{8} \\ -191334 \end{bmatrix}$$

I valori di soluzione si ottengono risolvendo il sistema:

$$\varphi_B = -3.1172\cdot10^{-4};\quad \varphi_C = -8.6444\cdot10^{-5};\quad \delta_B = -23.084\ m$$



I valori dei momenti sono:

$M_{BA} = 2.6443 \cdot 10^8$ Nmm $= 264,43$ kNm

$M_{BC} = -264.43$ kNm

$M_{CB} = 34.357$ kNm

$M_{CD} = -34.357$ kNm

$M_{DC} = 336.73$ kNm

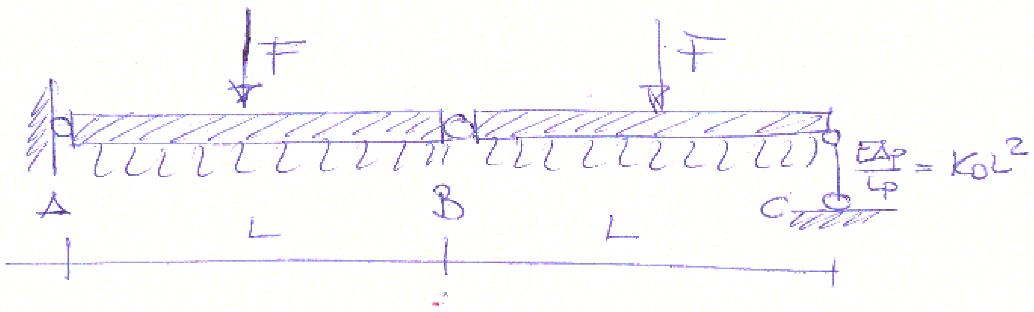
Esercizio 1.

$L = 1 + 10 - 1 = 10$ m

$F = 100 + 10 \cdot 10 = 200$ kN

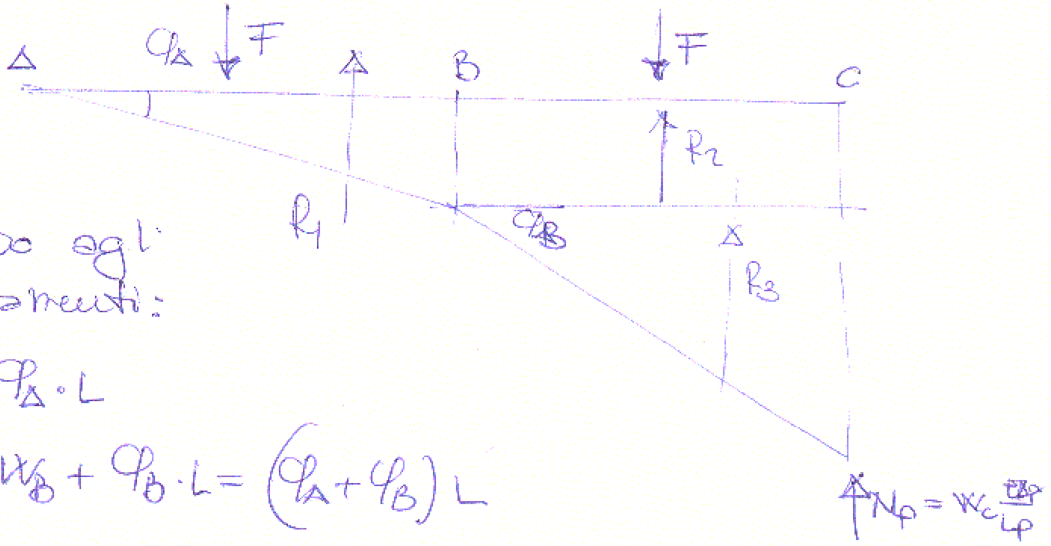
$K_0 = 0.05$ N/mm^3

$B = 50 + 5 \cdot 10 = 100$ cm



• Incognite

φ_A e φ_B descrivono completamente il campo di spostamenti (e dunque la reazione sul terreno) della trave.



Quanto agli spostamenti:

$w_B = \varphi_A \cdot L$

$w_C = w_B + \varphi_B \cdot L = (\varphi_A + \varphi_B)\, L$

Da cui le reazioni concentrate come risultanti parziali del diagramma del terreno:

$$R_1 = K w_B \cdot \frac{L}{2} \; ; \; R_2 = K w_B \cdot L \; ; \; R_3 = K \varphi_B L \cdot \frac{L}{2}$$

- Equazioni

  - equazione di equilibrio globale alla rotazione intorno ad A

$$F \cdot \frac{L}{2} + F \frac{3}{2} L - R_1 \cdot \frac{2}{3} L - R_2 \cdot \frac{3}{2} L - R_3 \frac{5}{3} L +$$
$$- N_p \cdot 2L = 0$$

  - equazione di equilibrio del secondo tratto alla ~~rotaz~~ rotazione attorno a B

$$F \cdot \frac{L}{2} - R_2 \frac{L}{2} - R_3 \frac{2}{3} L - N_p \cdot L = 0$$

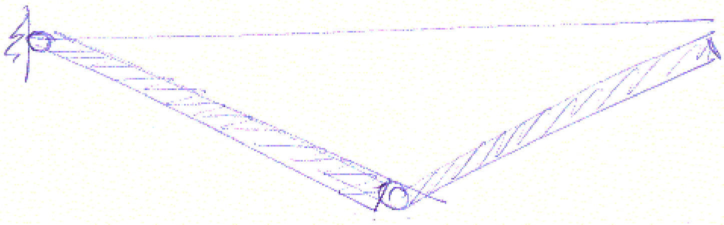
- Risoluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{6} K L^3 + \frac{2 E A_p}{L_p} \cdot L^2 & \frac{5 K L^3}{6} + \frac{2 E A_p}{L_p} \cdot L^2 \\ \frac{K L^3}{2} + \frac{E A_p}{L_p} \cdot L^2 & \frac{K L^3}{3} + \frac{E A_p}{L_p} \cdot L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2FL \\ \frac{FL}{2} \end{bmatrix}$$

da cui

$$\varphi_A = 9.99595 \cdot 10^{-5} \; ; \; \varphi_B = -9.7976 \cdot 10^{-5}$$

e dunque:



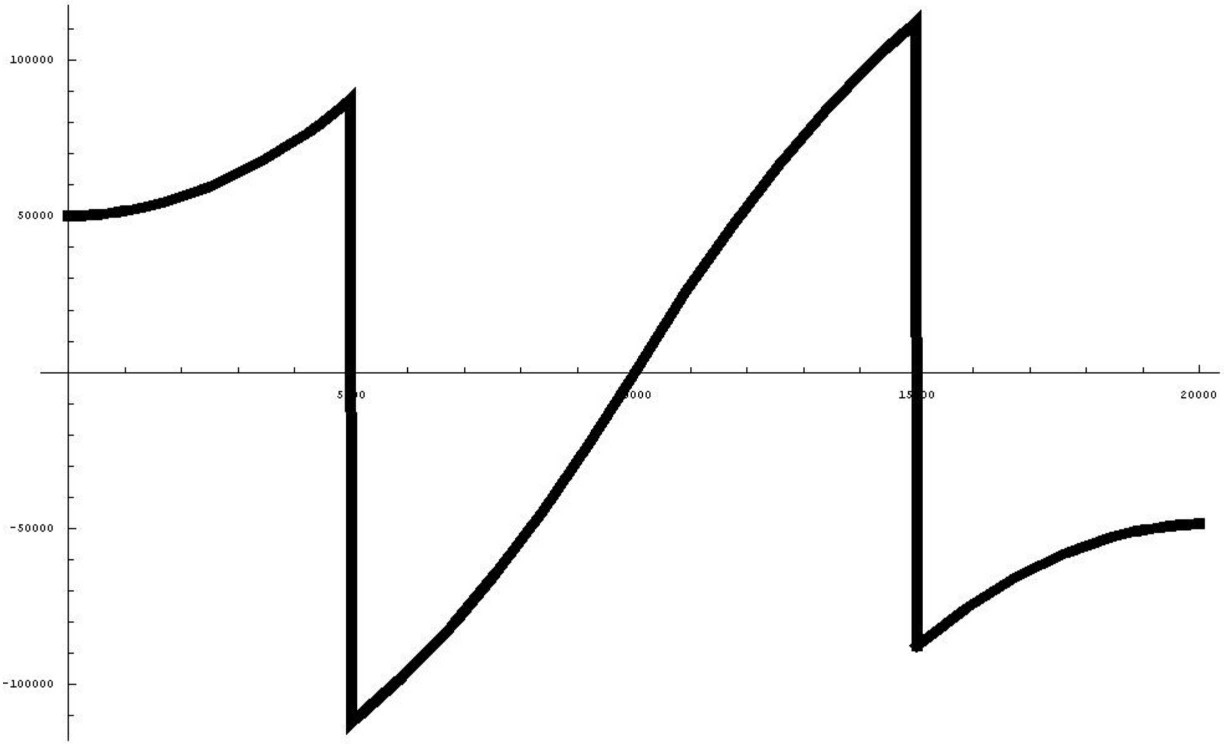
$W_A = 0$

$W_B = 0.996 \text{ mm}$

$W_C = 0.0162 \text{ mm}$

Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

Taglio



Momento Flettente